PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER TRIGONOMETRI MENGGUNAKAN METODE GAUSS JOURDAN DAN METODE INVERS

COMPLETION OF THE LINEAR EQUATIONS SYSTEM OF TRIGONOMETRY EMPLOYED GAUSS JOURDAN'S METHODS AND THE INVERS' METHOD

Fitrah Sari Wahyuni Harahap*[1], Rusmini[2]
[1,2]Fakultas Teknik dan Ilmu Komputer, Universitas Potensi Utama; Jalan K.L Yos Sudarso Km. 6,5 No. 3-A, Tanjung Mulia, Kec. Medan Deli, Kota Medan, telp (061) 6640525
[1]Informatika, FTIK UPU, Medan
[2]Sistem Informasi, FTIK UPU, Medan
e-mail: *[1]fitrah18.upu@gmail.com, [2]rusminiponsan@yahoo.co.id

Abstrak

Sebuah sistem persamaan yang salah satu persamaannya memuat bentuk linier disebut sistem persamaan linier. Agar sistem persamaan linier ini dapat diselesaikan atau diperoleh solusi, kita dapat menggunakan beberapa metode. Metode gauss jourdan dan metode invers adalah metode yang dapat digunakan untuk penyelesaian sistem persamaan linier. Penelitian ini memaparkan solusi sistem persamaan linier fungsi trigonometri dengan membandingkan dua metode, yaitu : gauss jourdan dan invers. Dengan menggunakan metode Gauss Jourdan kita peroleh solusi sistem persamaan mengunakan matriks echelon baris tereduksi melalui operasi baris elementer. Sedangkan menggunakan metode invers kita peroleh solusi sistem persamaan linier melalui invers matriks yang dikalikan dengan matriks konstanta, setelah sebelumnya melalui langkah- langkah unik. Solusi – solusi sistem persamaan linier dari kedua metode dibandingkan untuk ditentukan apakah kedua metode ini sesuai dan apakah dapat digunakan untuk penyelesaian sistem persamaan linier trigonometri secara umum. Untuk mempermudah perhitungan penelitian ini menggunakan aplikasi Matlab.

Kata kunci— fungsi trigonometri, matlab, metode gauss jourdan, metode invers, sistem persamaan linier

Abstract

A system of equations one of the similarities contains a linear form called the linear equations system. So that this linear equations system can be solved or obtained solutions, we can use several methods. Gauss jourdan's method and invers' method are methods that can be used for the completion of the linear equations system. The study presents a solution to the linear equations of trigonometry functions by comparing two methods: gauss jourdan and invers. By using gauss journese's method, we have found an equal-system solution using a echelon matrix fused through an elementer line operation. As for invers we obtain linear system solutions through invers a matrix multiplied by constant matrix, after all through unique steps. Solution-the linear equations solution of the two methods compared to whether they are compatible and whether they can be used for the general completion of the linear equations system. To facilitate calculating this study using a matlab application.

Keywords— trigonometry functions, matlab, gauss jourdan's method, invers' method, the linear equations

1. PENDAHULUAN

Kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi serta seni semakin meningkat seiring dengan perkembangan zaman. Hasil dari peningkatan kemajuannya pada saat ini, maka telah menjadi

 ISSN: 2085-1367
e-ISSN :2460-870X

bagian yang tidak dapat dipisahkan dengan kebutuhan manusia. Agar ilmu pengetahuan terus berkembang dan maju maka perlu diadakan penelitian-penelitian, baik yang bertujuan menemukan dan menyelesaikan masalah-masalah baru, mengembangkan pengetahuan maupun menguji kebenaran dalam suatu bidang ilmu.

Sistem persamaan linier dipakai untuk mendapatkan solusi sistem persamaan dengan menggunakan berbagai metode. Pada penelitian ini penulis menggunakan perbandingan dua metode, yakni : metode gauss jourdan dan metode invers. Sehingga kita dapat mengetahui apakah kedua metode tersebut efektif dan dapat digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linier dalan bentuk trigonometri.

Sistem Persamaan Linier (SPL) mempunyai bentuk umum :

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad\;\; \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Di mana $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variabel tak diketahui, $a_{ij}, b_i, i = 1,2, \ldots, m; j = 1,2, \ldots, n$ bilangan diketahui. Sistem persamaan linier ini dengan *m* persamaan dan *n* variabel. Sistem persamaan linier yang mempunyai penyelesaian, baik tunggal maupun banyak disebut sistem persamaan konsisten. Sedangkan sistem persamaan linier yang tidak mempunyai penyelesaian disebut sistem persamaan linier yang tidak konsisten. Berikut ini adalah penyajian sistem persamaan linier dalam bentuk matriks :

Sistem Persamaan Linier	Matriks
$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$

Strategi solusi sistem persamaan linier adalah dengan mengganti sistem penyelesaian linier lama menjadi sistem persamaan linier baru yang mempunyai solusi sama (equivalen) namun dalam versi yang lebih lugas. Operasi yang dipakai adalah operasi baris elementer (OBE). Pada OBE, sistem persamaan linier atau bentuk matriksnya diupayakan menjadi bentuk yang lebih lugas sehingga tercapai satu elemen tak nol pada suatu baris.

Metode Gauss Jourdan

Gagasan pada metode ini adalah mengupayakan matriks ke dalam bentuk echelon baris tereduksi. Sehingga diperoleh gambaran umum matriks echelon baris tereduksi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan catatan lambang * dapat diisi oleh bilangan real sembarang.

Metode Invers

Misalkan persamaan linier simultan mempunyai persamaan sebagai berikut :

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

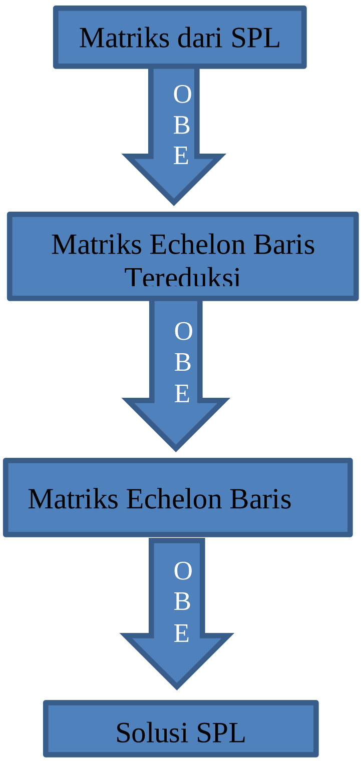
dicari harga- harga $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang merupakan penyelesaian sistem persamaan linier. Langkah pertama adalah mengubah persamaan linier simultan menjadi pola perkalian matriks sebagai berikut :

$$\begin{array}{ccccc} A & . & x & = & b \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \end{array}$$

Dengan operasi matriks, maka matriks x adalah $= A^{-1}b$, dengan A^{-1} adalah invers matriks sehingga penyelesaian sistem persamaan linier dapat ditentukan. Sehingga melalui penelitian ini kita dapat menentukan solusi sistem persamaan linier menggunakan dua metode, yaitu : gauss jourdan dan invers. Selain itu kita dapat membandingkan kedua metode tersebut yang masing-masing mempunyai karakteristik dan langkah penyelesaian yang unik.

2. METODE PENELITIAN

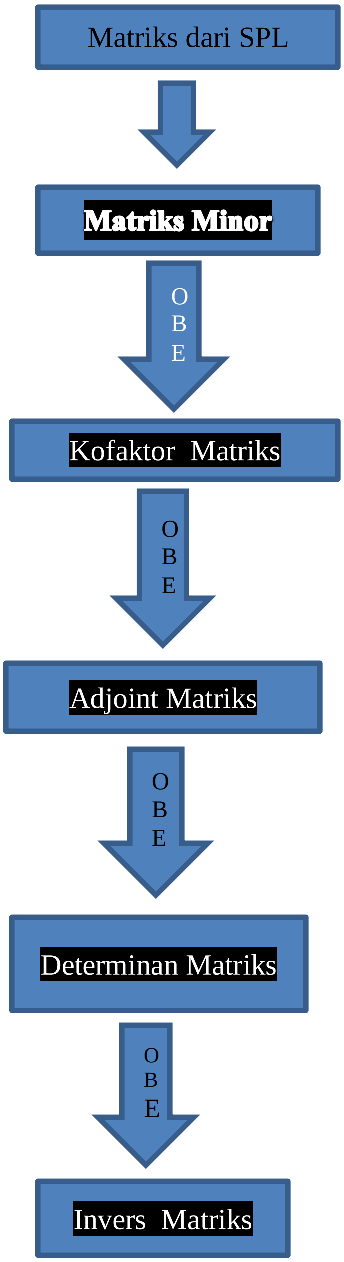
Pada penelitian ini penulis membandingkan dua buah metode, yaitu : gauss jourdan dan invers untuk solusi sistem persamaan linier. Pencarian solusi penyelesaian sistem persamaan linier dapat dilakukan dengan menentukan matriks identitas melalui operasi baris elementer. Langkah ini dapat digunakan untuk menemukan solusi yang terbaik untuk matriks echelon baris maupun echelon baris tereduksi.



Gambar 1. Alur Metode Gauss Jourdan

Pada gambar 1 langkah awal yang kita lakukan adalah mengubah sistem persamaan linier menjadi bentuk matriks dengan elemen matriks koefisien dan konstanta. Melalui operasi baris elementer (OBE) kita harus memperoleh bentuk matriks echelon baris, dilanjutkan lagi melalui OBE sampai kita peroleh matriks echelon baris tereduksi. Setelah matriks echelon baris tereduksi muncul, kita sudah bisa menentukan solusi SPL dengan mengambil angka penyelesaian pada kolom akhir matriks.

Sedangkan metode lain adalah dengan menentukan invers matriks setelah lebih dahulu kita menghitung determinan matriks dan adjoint matriks dari matriks kofaktornya.



Gambar 2. Alur Metode Invers

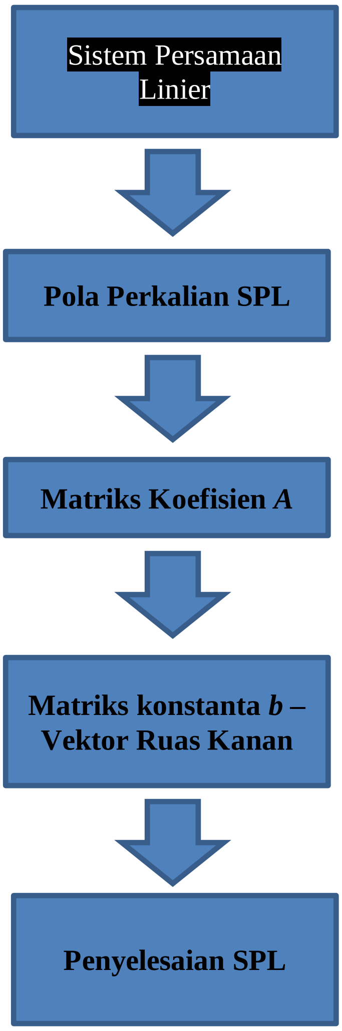
Pada diagram tersebut, langkah pertama adalah menentukan minor matriks *Mij* dari tiap elemen matriks *aij*. Setelah minor matriks diperoleh, dilanjutkan untuk menentukan kofaktor matriks dan adjoint matriks. Determinan matriks diperoleh dari ekspansi matriks sebelum langkah akhir dalam menentukan invers matriks.

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Menggunakan Matlab

Misalkan persamaan linier simultan mempunyai persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

dicari harga- harga $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang merupakan penyelesaian sistem persamaan linier. Berikut adalah alur penyelesaian sistem persamaan linier dengan menggunakan aplikasi Matlab :



Gambar 3. Alur Penyelesaian SPL Menggunakan Matlab

Berdasarkan Gambar 3 dapat kita ikuti langkah- langkah penyelesaian atau solusi dari sistem persamaan linier dengan menggunakan aplikasi Matlab, yaitu :

Langkah pertama adalah mengubah persamaan linier simultan menjadi pola perkalian matriks sebagai berikut :

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}} \; . \; \underset{x}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}$$

Langkah berikutnya adalah mendefinisikan matriks *A* pada aplikasi Matlab, misalkan matriks *A* adalah matriks persegi ordo 3 x 3, maka matriks *A* didefinisikan dengan :
>> A = [a_{11} a_{12} a_{13}; a_{21} a_{22} a_{23}; a_{31} a_{32} a_{33}]

Langkah selanjutnya mendefinisikan matriks konstanta *b* sebagai vektor ruas kanan:
>> b = [b_1; b_2; b_3]

Langkah terakhir adalah membuat perintah penyelesaian Sistem Persamaan Linier, misalkan matriks *X* , maka:
>> X = A\ b

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sistem Persamaan Linier berikut merupakan sistem persamaan linier dari beberapa persamaan trigonometri untuk ditentukan penyelesaiannya :

$$2\ \sin\alpha - \cos\beta + 3\ \tan\gamma = 3 \quad (1)$$
$$4\ \sin\alpha + 2\ \cos\beta - 2\ \tan\gamma = 2 \quad (2)$$
$$6\ \sin\alpha - 3\ \cos\beta + \tan\gamma = 9 \quad (3)$$

Untuk sudut α, β, dan γ yang tidak diketahui, dimana $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$, dan $0 \le \gamma \le \pi$.

3.1 Metode Gauss Jourdan

Dari persamaan trigonometri di atas kita dapat memisalkan trigonometri sin α = x , cos β = y , dan tan γ = z, sehingga persamaan di atas menjadi

$$2x - y + 3z = 3 \quad (1)$$
$$4x + 2y - 2z = 2 \quad (2)$$
$$6x - 3y + z = 9 \quad (3)$$

Matriks yang dibentuk dari sistem persamaan linier di atas adalah :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Melalui operasi baris elementer (OBE) diperoleh bentuk matriks echelon baris tereduksi

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ sehingga dalam hal ini $x = \sin\alpha = 1$, maka

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^o, 0 \le \alpha \le 2\pi$$

untuk $y = \cos\beta = -1$, maka

$$\beta = \pi = 180^o, 0 \le \beta \le 2\pi$$

untuk $z = \tan\gamma = 0$, maka

$$\gamma = 0^o \; dan \; 180^o \; , 0 \le \gamma \le \pi$$

3.2 Metode Invers

Pada metode invers terdapat langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan minor matriks dari tiap- tiap elemen matriks :

$$M_{11} = 4 \; ; \; M_{12} = -16 \; ; \; M_{13} = -24$$
$$M_{21} = 10 \; ; \; M_{22} = -20 \; ; \; M_{23} = 0$$
$$M_{31} = -8 \; ; \; M_{32} = -8 \; ; \; M_{33} = 8$$

Kemudian tiap- tiap minor matriks tersebut dikalikan dengan $(-1)^{i+j}$diperoleh :

$$a_{11} = 4 \; ; \; a_{12} = 16 \; ; \; a_{13} = -24$$
$$a_{21} = -10 \; ; \; a_{22} = -20 \; ; \; a_{23} = 0$$
$$a_{31} = -8 \; ; \; a_{32} = 8 \; ; \; M_{33} = 8$$

Sehingga matriks kofaktor yang terbentuk adalah :

Kofaktor $C = \begin{bmatrix} 4 & 16 & -24 \\ -10 & -20 & 0 \\ -8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$. Sedangkan adjoint dari kofaktor C adalah $C^T = \begin{bmatrix} 4 & -10 & -8 \\ 16 & -20 & 8 \\ -24 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. Di sisi lain kita tentukan pula determinan matriks menggunakan metode ekspansi, diperoleh :

$$\nabla A = \text{-80}$$

Langkah berikutnya adalah menentukan invers matriks, yaitu :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{20} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{10} \\ -\frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Kemudian, diperoleh X = $\begin{bmatrix} -1{,}3 \\ -0{,}2 \\ 0 \end{bmatrix}$, artinya kita peroleh $x = \sin\alpha = -1{,}3$ maka

$$\alpha = \infty \; , 0 \le \alpha \le 2\pi \; , -1 \le \sin\alpha \le 1$$

untuk $y = \cos\beta = -0{,}2$, maka

$$\beta = 0{,}5640 \, \pi = 101{,}5363° \; , 0 \le \beta \le 2\pi, -1 \le \cos\beta \le 1$$

untuk $z = \tan\gamma = 0$, maka

$$\gamma = 0^o \; dan \; 180^o \; , 0 \le \gamma \le \pi$$

3.3 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Trigonometri Menggunakan Matlab

Dari persamaan trigonometri pada permasalahan di atas kita dapat memisalkan trigonometri sin α = x , cos β = y , dan tan γ = z, sehingga persamaan di atas menjadi

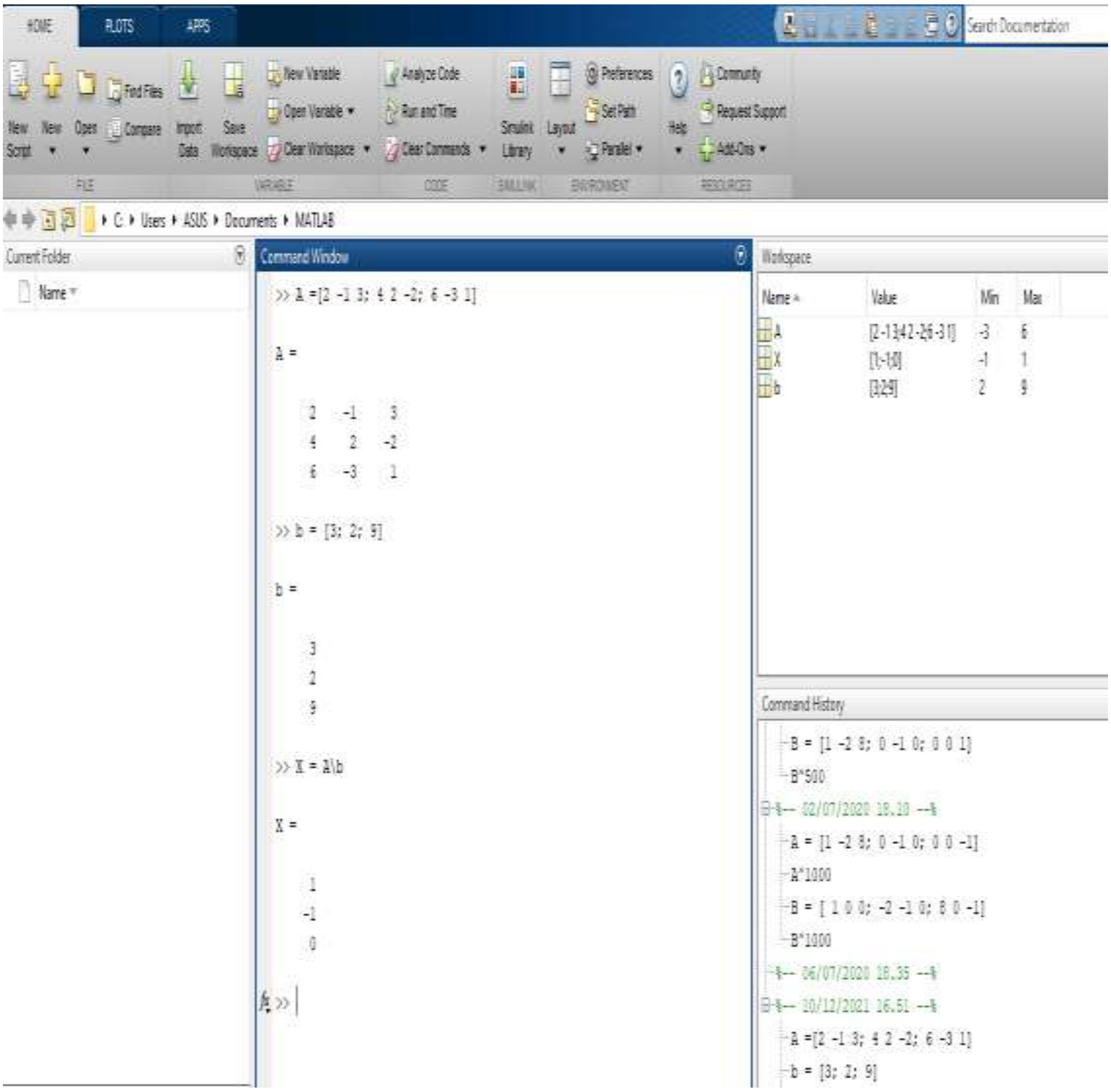
$$2x - y + 3z = 3 \qquad (1)$$
$$4x + 2y - 2z = 2 \qquad (2)$$
$$6x - 3y + z = 9 \qquad (3)$$

Pola perkalian matriksnya adalah sebagai berikut :

$$A \,.\, X = b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Perintah pada aplikasi Matlab :
$>> A = [2\ -1\ 3;\ 4\ 2\ -2;\ 6\ -3\ 1]$
$>> b = [3\,;2\,;9]$
$>> X = A\backslash\, b$



Gambar 4. Tampilan Perintah dan Solusi SPL Menggunakan Aplikasi Matlab

Dari Gambar 4 kita peroleh solusi SPL yang sama dengan solusi SPL menggunakan metode Gauss Jourdan, yang kita ketahui solusi pada metode Gauss Jourdan diperoleh melalui serangkaian proses operasi baris elementer (OBE). Dari Gambar 4 yang kita peroleh adalah matriks solusi $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ dengan $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sehingga dalam hal ini $x = \sin\alpha = 1$, maka

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^o, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

untuk $y = \cos\beta = -1$, maka

$$\beta = \pi = 180^o, 0 \leq \beta \leq 2\pi$$

untuk $z = \tan\gamma = 0$, maka

$$\gamma = 0^o\ dan\ 180^o, 0 \leq \gamma \leq \pi$$

4. KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh penulis berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan adalah sebagai berikut :

Tabel 1. Penyelesaian spl menggunakan metode gauss jourdan

X	SIN α	1	$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^o,$ $0 \leq \alpha \leq 2\pi$
Y	COS β	-1	$\beta = \pi = 180^o,$ $0 \leq \beta \leq 2\pi$
Z	TAN γ	0	$\gamma = 0^o\ dan\ 180^o,$ $0 \leq \gamma \leq \pi$

Dari tabel 1 diperoleh sudut- sudut yang memenuhi untuk penyelesaian fungsi trigonometri menggunakan metode gauss jourdan.

Tabel 2. Penyelesaian spl menggunakan metode invers

X	SIN α	-1,3	$\alpha = \infty, 0 \leq \alpha \leq 2\pi,$ $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$
Y	COS β	-0,2	$\beta = 0{,}5640\,\pi = 101{,}5363°,$ $0 \leq \beta \leq 2\pi, -1 \leq \cos\beta \leq 1$
Z	TAN γ	0	$\gamma = 0^o\ dan\ 180^o,$ $0 \leq \gamma \leq \pi$

Dari tabel 2 diperoleh sudut- sudut yang memenuhi untuk penyelesaian fungsi trigonometri menggunakan metode invers. Dari kedua tabel di atas kita dapat menyimpulkan terdapat perbedaan yang sangat signifikan untuk penyelesaian sistem persamaan linier pada fungsi trigonometri menggunakan metode gauss jourdan maupun metode invers. Metode Gauss Jourdan memiliki penyelesaian yang sama dengan penyelesaian atau solusi SPL menggunakan aplikasi Matlab, yakni yang terdapat pada tabel 1.

5. SARAN

Dari penelitian ini penulis menyimpulkan terdapat perbedaan yang sangat signifikan untuk penyelesaian sistem persamaan linier pada fungsi trigonometri menggunakan metode gauss jourdan maupun metode invers. Sehingga diharapkan bagi penelitian selanjutnya untuk menemukan metode yang lebih tepat dalam penyelesaian sistem persamaan linier pada fungsi trigonometri.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton Howard, 1994, *Aljabar Linier Elementer*, Penerbit Erlangga, Jakarta

[2] Arista, 1996, *Aljabar Linier*, Jakarta

[3] Jogiyanto, 1999, *Aplikasi Borland Delphi*, Andi Offset, Jakarta

[4] Suparno,suprianto.2014.*Komputasi untuk Sains dan Teknik Menggunakan Matlab*.Depok. Depertemen Fisika.FMIPA

[5] Sahyar.2014.*Komputasi Sains Fisika*, Medan.Unimed Press

[6] (2016).Available:http://Cara Menyelesaikan Soal SPLDV dengan Metode Grafik.html

[7] (2016).Available:http://Konsep Matematika (KoMa) Sistem Persamaan Linier Dua Variabel (SPLDV).html

[8] (2016).Available:http://Sistem persamaan Linier dua variabel _ Cep Ayahnya Avicenna - Academia.edu.html

[9] Muklis, dkk. 2013. Matematika Kelas X untuk SMA/MA/SMK/MAK. Klaten: PT Intan Pariwara. Hal 54-57

[10] https://id.wikipedia.org/wiki/Persamaan_Linier

[11] http://ibuyun04.blogspot.co.id/2013/06/makalah-persamaan-Linier-2-variabel.html

[12] https://adisukron12.blogspot.com/2015/10/makalah-materi-sistem-persamaan-linier.html

[13] https://rumusrumus.com/sistem-persamaan-linier

[14] Sistem Persamaan Linier.Presentasi Powerpoint.2019

[15] Sundari,Dewi.Penyelesaian Persamaan Differensial Bernoulli Menggunakan Metode Runge Kutta Gill dan Runge Kutta Merson.*Skripsi*.Universitas Lampung.2019